#### Лекция №14

###### Моделирование операций по схеме марковских случайных процессов

###### Марковские случайные процессы с дискретными состояниями

При анализе операций с точки зрения выбора оптимальных управленческих решений зачастую приходится иметь дело со случайными процессами, ход и исход которых зависят от ряда случайных факторов, сопровождающих эти операции. При таких операциях возникает необходимость построения вероятностных моделей явлений.

Пусть *S* - некоторая физическая система, состояние *S* которой меняется с течением времени случайным (непредсказуемым) образом. Говорят, что в таком случае в *S* протекает случайный процесс.

###### Примеры случайных процессов:

* процесс функционирования ЭВМ (случайными являются: поступление заказов на ЭВМ и вид заказов; случайные выходы ЭВМ из строя);
* процесс наведения на цель управляемой ракеты (- случайные помехи в системе управления ракетой);
* процесс выполнения плана снабжения группы предприятий (случайные перебои в плане снабжения и др.).

Случайный процесс, протекающий в *S* называется *марковским процессом* (или «процессом без последействий»), если он обладает следующим свойством:

*Для каждого момента времени t*0

*вероятность любого состояния*

*системы в будущем (при*

*t*  *t*0 *) зависит только от её состояния при*

*t*  *t*0 *и*

*не зависит от того, когда и каким образом система пришла в это состояние, т.е. предыстория процесса не влияет на будущее развитие процесса.*

Марковские случайные процессы (МСП) делятся на классы в зависимости от того, *как и в какие моменты времени система S может менять свои состояния*.

МСП называется *процессом с дискретными состояниями*, если возможные состояния системы:

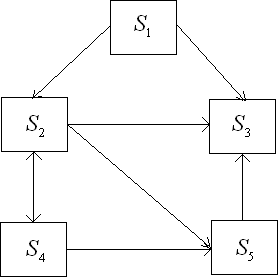
*S*1 , *S*2 , *S*3 ...

можно перечислить (пронумеровать) одно за другим, а сам процесс состоит в том, что время от времени *S* скачком (мгновенно) перескакивает из одного состояния в другое.

Существуют также МСП с *непрерывными* состояниями: для них характерен постепенный, плавный переход из состояния в состояние (например, процесс изменения напряжения в осветительной сети есть МСП с непрерывными состояниями).

В дальнейшем изложении, если не будет оговорено другое, мы будем рассматривать МСП с *дискретными состояниями*.

При анализе МСП удобно пользоваться так называемым *графом состояний*. Граф состояний (ГС) геометрически изображает возможные состояния системы и её возможные переходы из состояния в состояние:

прямоугольник-состояние

переход из состояния в состояние – стрелки, соединяющие прямоугольники.

Стрелки обозначают непосредственный переход из состояния в состояние; если *S*

может перейти из

*S*1 в *S*3

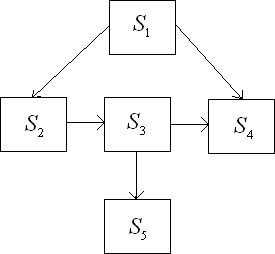
только через

*S* 2 , то

стрелками отмечаются только

*S*1  *S*2 и

*S*2  *S*3 , но не *S*1  *S*3 .

Пример построения графа состояний.

Пусть *S* - автомашина, которая может находиться в одном из 5 состояний (см. ГС, возможные переходы заданы стрелками):

*S*1 - исправна, работает;

*S* 2 - неисправна, ожидает осмотра;

*S*3 - осматривается; *S* 4 - ремонтируется; *S*5 - списана.

###### МСП с дискретными состояниями и дискретным временем.

**Марковская цепь.**

МСП называется процессом с *дискретным временем* (МСП ДВ), если

переходы

*Si*  *S j*

возможны только *в строго определенные*, заранее

фиксированные моменты времени: состояние.

*t*1 ,*t*2 .... В промежутках *S* сохраняет своё

МСП называется процессом с *непрерывным временем* (МСП НВ), если

*Si*  *S j*

возможен *в любой, наперёд неизвестный, случайный момент*

времени *t* .

###### Рассмотрим МСП ДВ:

Пусть

*S* : *S*1 , *S*2 ,..., *Sn* ; переходы возможны в моменты

*t*1 ,*t*2 ,...,*tk* ,... Будем

называть эти моменты «шагом» или «этапами» процесса. Будем также рассматривать СП, происходящие в *S* , как функцию *целочисленного*

*аргумента*: 1, 2,3,...,*k*... (номера шага).

Случайный процесс, происходящий в системе *S* , состоит в том, что в

последовательные моменты времени

*t*1 ,*t*2 ...

система *S* оказывается в тех или

других состояниях, ведя себя следующим, например, образом (в общем случае в моменты *t*1 ,*t*2 ... система может оставаться в прежнем состоянии):

*S*1  *S*1  *S*2  *S*3  *S*3  *S*1  *S*1 ...

Обозначим через находится в состоянии

( *k* )

*i*

*S*

*Si* .

событие, состоящее в том, что после *k* шагов *S*

(!) Причём при любом *k события*

*S* ( *k* ) , *S* ( *k* ) ,...,*S* ( *k* ) ,...,*S* ( *k* ) - образуют полную группу и несовместны.

1 2 *i n*

Процесс, происходящий в системе, можно представить как последовательность (цепочку) событий, например:

*S* (0) , *S* (1) , *S* ( 2) , *S* (3) , *S* ( 4) ,....

1 2 1 2 2

Такая случайная последовательность событий называется *марковской*

*цепью* (МЦ), если для каждого шага вероятность перехода из любого *Si* в

любое *S j*

не зависит от того, когда и как *S* пришла в

*Si* .

Будем описывать МЦ с помощью так называемых *вероятностей состояний*.

Пусть после любого *k* -го шага *S* может быть в одном из состояний:

*S*1 , *S*2 ,...,*Sn* ,

т.е. осуществится одно из группы несовместных событий:

*S* ( *k* ) , *S* ( *k* ) ,...,*S* ( *k* ) ,...,*S* ( *k* ) .

1 2 *i n*

Обозначим *вероятности этих событий*:

*P* (1)  *P*(*S* (1) );*P* (1)  *P*(*S* (1) );...; *P* (1)  *P*(*S* (1) )

* вероятности после 1-го шага.

1 1 2 2 *n n*

*P* (2)  *P*(*S* ( 2) );*P* (2)  *P*(*S* ( 2) );...; *P* (2)  *P*(*S* ( 2) ) - вероятности после 2-го шага;

1 1 2 2 *n n*

и вообще после *k* -го шага:

*P* (*k*)  *P*(*S* ( *k* ) );*P* (*k*)  *P*(*S* ( *k* ) );...; *P* (*k*)  *P*(*S* ( *k* ) ) .

1 1 2 2 *n n*

Легко видеть, что

*P*1 (*k*)  *P*2 (*k*)  ...  *Pn* (*k*) 1, т.к. это вероятности несовместных событий, образующих полную группу.

Будем называть вероятности

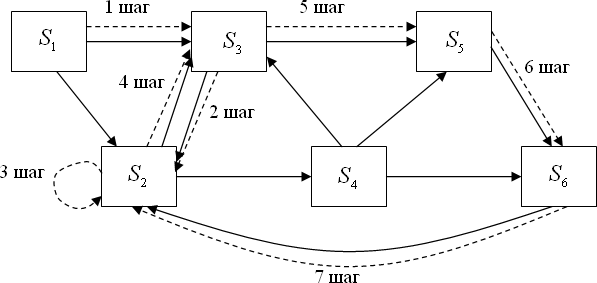
*P*1 (*k* ), *P*2 (*k* ),..., *Pn* (*k* )

*вероятностями состояний*.

**Поставим задачу**: *найти вероятности состояний системы для любого k* .

(*Pi* (*k*)  ?), *i* 1,2,...,*n*

Пусть дан граф состояний системы:



Стрелки – возможные переходы за 1 шаг.

Случайный процесс (МЦ) можно представить как случайное блуждание по

ГС точки, изображающей систему *S* в моменты времени пунктир даёт поведение системы

*S*1  *S*3  *S*2  *S*2  *S*3  *S*5  *S*6  *S*2

*t*1 ,*t*2 ,.... На графе

(*t*0 )

(*t*1 )

(*t*2 )

(*t*3 )

(*t*4 )

(*t*5 )

(*t*6 )

(*t*7 )

Для любого шага (момента времени

*t*1 ,*t*2 ,...,*tk* ... или номера 1,2,3,…k,…)

существуют какие-то вероятности перехода

*Si*  *S j*

(некоторые из них равны

нулю, если непосредственный переход за 1 шаг невозможен), а также *вероятность задержки* системы в данном состоянии. Будем называть их *переходными вероятностями марковской цепи*.

МЦ называется *однородной*, если переходные вероятности не зависят от номера шага. В противном случае МЦ – неоднородна.

Рассмотрим однородную марковскую цепь (ОМЦ).

Пусть

*S* : *S*1 , *S*2 ,..., *Sn* .

Пусть:

*Pij*

* вероятность перехода

*Si*  *S j*

за один шаг.

шаг.

*Pii*

* вероятность задержки *S* в состоянии

*Si* , т.е.

*Si*  *Si*

за 1

Запишем

*Pij*

в виде матрицы:

*Pij*

*P*11 *P*21

 ...

*Pi*1

...

*Pn*1

*P*12 *P*22

...

*Pi* 2

...

*Pn* 2

...

...

...

...

...

...

*P*1 *j*

*P*2 *j*

...

*Pij*

...

*Pnj*

...

...

...

...

...

...

*P*1*n P*2 *n*

...

*Pin*

...

*Pnn*

Пользуясь *S* ( *k* ) , *S* ( *k* ) ,...,*S* ( *k* ) , переходные вероятности можно записать как

1 2 *n*

условные вероятности:

*P*  *P*(*S* ( *k* ) / *S* ( *k* 1) )

Отсюда следует, что

*ij j i*

*P*11  *P*12  ...  *P*1 *j*  ...  *P*1*n*  1

*Pi*1  *Pi* 2  ...  *Pij*  ...  *Pin*  1

........................................

*Pn*1  *Pn* 2  ...  *Pnj*  ...  *Pnn*  1,

т.к. в каком бы состоянии система ни была перед *k* -м шагом, события

*S* ( *k* ) , *S* ( *k* ) ,..., *S* ( *k* )

несовместны и образуют полную группу.

1. 2 *n*

Часто при рассмотрении МЦ бывает удобным пользоваться ГС, на котором у стрелок проставлены соответствующие переходные вероятности. Такой ГС называется «*размеченным графом состояний*» (РГС).

Здесь проставлены не все элементы матрицы, а только такие, которые

меняют состояние системы, т.е.

*Pij*

при *i*  *j* ;

Очевидно, можно написать (для данного ГС):

Если из *Si*

*P*11  1  (*P*12  *P*13 ) *P*22  1  (*P*23  *P*24 ) *P*33  1  (*P*32  *P*35 )

*P*44  1  (*P*43  *P*45  *P*46 )

*P*55  1  (*P*56 )

*P*66  1  (*P*62 )

не исходит ни одной стрелки, то

*Pii*  1 .

Если иметь РГС (или то же самое – матрицу переходных вероятностей) и начальное состояние, то можно найти вероятности состояний.

*P*1 (*k* ), *P*2 (*k* ),..., *Pn* (*k* ) для любого *k* .

###### Схема построения:

Предположим, что в начальный момент (перед первым шагом) *S*

находится в состоянии

*Sm* . Тогда для начального момента (0) будем иметь:

*P*1 (0)  0; *P*2 (0)  0;....*Pm* (0) 1; *Pn* (0)  0.

Найдем вероятности состояний после первого шага (из РГС или

*Pm*1 , *Pm* 2 , , *Pmm* , , *Pmn* ,

*P*1 (1)  *Pm*1 ; *P*2 (1)  *Pm* 2 ;...*Pm* (1)  *Pmm* ;...; *Pn* (1)  *Pmn* (\*)

Найдём вероятности состояний после 2-го шага:

*P*( 2) , *P*( 2) ,..., *P*( 2) ,. *P*( 2)

*Pij* )

1 2 *i n*

Их будем вычислять по формуле полной вероятности, с гипотезами:

* + после первого шага система была в состоянии
  + после первого шага система была в состоянии

*S*1 ;

*S* 2 ;

………………………………………………………

* + после первого шага система была в состоянии

*Si* ;

………………………………………………………

* + после первого шага система была в состоянии

*Sn* ;

Вероятности гипотез известны рядом (\*): условные вероятности перехода в

состояние *Si*

при каждой гипотезе тоже известны из

*Pij*

. По формуле

полной вероятности получим:

*P*( 2)  *P*(1) *P*

 *P*(1) *P*

 ...  *P*(1) *P* ; 

1 1 11

2 21

*n n*1

*P*( 2)  *P*(1) *P*

 *P*(1) *P*

 ...  *P*(1) *P* ;

2 1 12

2 22

*n n* 2 

............................................... 

*P*( 2)  *P*(1) *P*

 *P*(1) *P*

 ...  *P*(1) *P*

; ...(\*\*)

*i* 1 1*i*

1. 2*i*

*n ni* 

.............................................. 



*P*( 2)  *P*(1) *P*

 *P*(1) *P*

 ...  *P*(1) *P* .

Или короче:

*n* 1 1*n*

2 2 *n*

*n nn* 

*n*

*Pi* (2)   *Pj* (1)*Pji*

*j* 1

(*i*  1,2,...,*n*) (\*\*\*).

В сумме (\*\*\*) суммирование формально распространяется на все состояния

*S*1 ,...,*Sn* ;

фактически надо в сумме учитывать те состояния (по *j* ), из которых

возможен переход в *Si*

(или задержка в нем, т.е.

*Sii* ).

Итак, известны теперь

*P*( 2) , *P*( 2) ,..., *P*( 2) ,..., *P*( 2)

Аналогично:

1 2 *i n*

*P*(3)   *P* (2)*P* ,

*n*

*i*  1,2,..., *n*

*i j ji*

*j*1

И вообще, после *k*-го шага:

*P*( *k* )   *P* (*k*  1)*P* ,

*n*

*i*  1,2,...,*n*

(\* \*\*\*)

*i j ji j* 1

Следовательно,

( *k* )

*i*

*P*

для всех состояний 1,2,…,*n* после *k* – шагов

определяется *рекуррентной* формулой (\*\*\*\*) через вероятности состояний

после

(*k*  1)

шага; те, в свою очередь, через вероятности состояний после

(*k*  2)

шага и т.д.

###### Пример.

По некоторой цели ведётся стрельба в моменты

*t*1 ,*t*2 ,*t*3 ,*t*4 .

(системы):

Возможные состояния цели

*S*1 -цель невредима;

*S* 2 -цель незначительно повреждена;

*S*3 -цель получила существенные повреждения;

*S* 4 -цель полностью поражена (не может функционировать). (РГС на рис.)

В начальный момент цель находится в состоянии

*S*1 . Определить

вероятности состояний цели после 4 выстрелов, т.е. Решение

*i*

*P*4  ?;

*i*  1,4.

Имеем:

*P*(0)  1; *P*(0)  *P*(0)  *P*(0)  0.

1 2 3 4

Из РГС имеем: Аналогично:

*P*12  0,4; *P*13  0,2;

*P*14  0,1; *P*11 1 (0,4  0,2  0,1)  0,3.

*P*21  0; *P*22  0,4; *P*23  0,4; *P*24  0,2;

Следовательно:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 0,3 | 0,4 | 0,2 | 0,1 |
| 0 | 0,4 | 0,2 | 0,2 |
| 0 | 0 | 0,3 | 0,7 |
| 0 | 0 | 0 | 1 |

*P*31  0; *P*32  0;

*P*41  0; *P*42  0;

*P*33  0,3; *P*34  0,7;

*P*43  0; *P*44  1;

Мы знаем, что

*p*10  1.

*Pij*  .

Следовательно, вероятности состояний после 1-го шага:

*p*11  0,3;

*p*2 1  0,4;

*p*3 1  0,2;

*p*4 1  0,1

Вероятности состояний после 2-го шага:

*p*1 2  *p*1 1 *P*11  0,3 0,3  0,09;

*p*2 2  *p*1 1 *P*12  *p*2 1 *P*22  0,3 0,4  0,4  0,4  0,28;

*p*3 2  *p*1 1 *P*13  *p*2 1 *P*23  *p*3 1 *P*33  0,3 0,2  0,4  0,4  0,2  0,3  0,28;

*p*4 2  *p*1 1 *P*14  *p*2 1 *P*24  *p*3 1 *P*34  *p*4 1 *P*44  0,3 0,1 0,4  0,2  0,2  0,7  0,11  0,35.

Вероятности состояний после 3-го шага:

*p*1 3  *p*1 2 *P*11  0,09 0,3  0,027;

*p*2 3  *p*1 2 *P*12  *p*2 2 *P*22  0,09 0,4  0,28 0,4  0,148;

*p*3 3  *p*1 2 *P*13  *p*2 2 *P*23  *p*3 2 *P*33  0,09 0,2  0,28 0,4  0,28 0,3  0,214;

*p*4 3  *p*1 2 *P*14  *p*2 2 *P*24  *p*3 2 *P*34  *p*4 2 *P*44 

 0,09 0,1  0,28 0,2  0,28 0,7  0,351  0,611.

Вероятности состояний после 4-го шага:

*p*1 4  *p*1 3 *P*11  0,027 0,3  0,0081;

*p*2 4  *p*1 3 *P*12  *p*2 3 *P*22  0,027 0,4  0,148 0,4  0,0700;

*p*3 4  *p*1 3 *P*13  *p*2 3 *P*23  *p*3 3 *P*33  0,027 0,2  0,148 0,4  0,214 0,3  0,1288;

*p*4 4  *p*1 3 *P*14  *p*2 3 *P*24  *p*3 3 *P*34  *p*4 3 *P*44  0,027 0,1  0,148 0,2 

 0,214 0,7  0,6111  0,7931.

Итак, вероятности исхода обстрелов цели после четырех выстрелов:

* цель не повреждена:

*p*14  0,008;

* цель незначительно повреждена:

*p*2 4  0,07;

* цель сильно повреждена:

*p*3 4  0,129;

* цель поражена полностью:

*p*4 4  0,793;

Рассмотрим теперь *общий случай* – *неоднородную марковскую цепь*, для

которой

*Pij*

меняются от шага к шагу.

Пусть

*k* 

*P*

*ij*

* вероятность

*Si*  *S j*

на *k* -м шаге, т.е.

*P**k*   *P**S* *k*  / *S* *k* 1 .

*ij j i*

Если заданы матрицы переходных вероятностей на каждом шаге, то по аналогии с формулой для ОМЦ, можно написать:

*ji*

*j*

*pi* *k*   

*n*

*j*1

*p* *k* 1*P**k* ,

*i*  1,2,..., *n*

Вычисления по этой формуле ничуть не сложнее, чем в случае ОМЦ, только необходимо знать ряд матриц переходных вероятностей, зависящих от номера шага, т.е.

*P*1 ; *P*2) ;...,

*P**k*  .

*ij ij ij*

###### Контрольные вопросы

1. Дайте общую характеристику случайных процессов. Приведите примеры.
2. Приведите определение марковского процесса. Почему марковский процесс называется «процессом без последействий»?
3. Какие разновидности марковских процессов (по состояниям и времени) вы знаете. Опишите их.
4. Что такое «граф состояний» и «размеченный граф состояний» марковского процесса?
5. Приведите определение однородной и неоднородной марковской цепи.
6. Выведите рекуррентную формулу для определения вероятностей состояний марковской цепи с дискретными состояниями и дискретным временем.